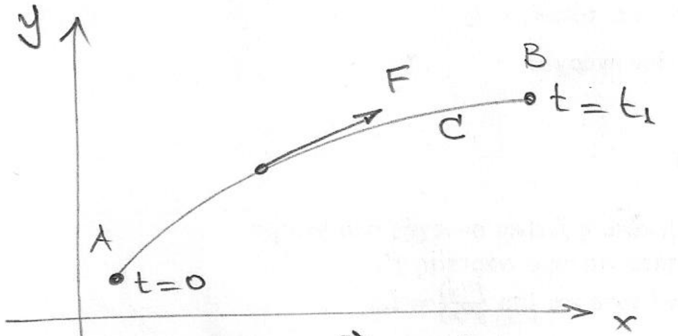
Άσκηση 23 (φυλ. 11)

Σώμα κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς. Όταν $t=0$ το σώμα δεν έχει διανύσει απόσταση ($S=0$). Να βρεθεί η ταχύτητα του την χρονική στιγμή $t_1$ όταν η δύναμη που ενεργεί πάνω του είναι $\vec{F}=5\vec{u}$. Δίνεται ότι για $t=0$ $\vec{u}=\vec{u}_0$ και $m$ η μάζα του σώματος. (Το $|\vec{u}|=2t$)

Λύση




Η δύναμη είναι $\vec{F}=5\vec{u}$. Το έργο $W$, κατά μήκος της τροχιάς $C$: $W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Από Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε ότι:

$$W=\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}=\int 5\underbrace{\bar{u}\cdot\bar{u}}_{|\bar{u}|^2}dt=\int 5|\vec{u}|^2dt=\frac{1}{2}m|\bar{u}_1|^2-\frac{1}{2}m|\bar{u}_0|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int 5|\vec{u}|^2dt=\frac{1}{2}m|\bar{u}_1|^2-\frac{1}{2}m|\bar{u}_0|^2\Rightarrow\frac{10}{m}\int|\vec{u}|^2dt=|\vec{u}_1|^2-|\vec{u}_0|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{|\vec{u}_1|^2=\frac{10}{m}\int|\vec{u}|^2dt+|\vec{u}_0|^2}\quad(3)$$

Αν $|\vec{u}|=2t$ τότε η (3) γίνεται: $|\vec{u}_1|^2=\frac{10}{m}\int_{t_0}^{t_1}4t^2dt+|\vec{u}_0|^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow|\vec{u}_1|^2=\frac{40}{m}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t_0}^{t_1}+|\vec{u}_0|^2\Rightarrow|\vec{u}_1|^2=\frac{40}{3m}t_1^3+|\vec{u}_0|^2$$

## Άσκηση 24

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο επίπεδο με την επίδραση της δύναμης,

$$\vec{F} = \alpha(\sin\omega t\,\bar{x}_0 + \cos\omega t\,\bar{y}_0)$$

Εάν το υλικό σημείο αρχικά ηρεμεί στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων να βρεθεί
(α) Το έργο μέχρι χρόνο t, (β) η ισχύς

### Λύση

Το έργο είναι ίσο με:

$$W = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \vec{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^t \vec{F}\cdot\vec{u}dt = \int_0^t (F_x\dot{x} + F_y\dot{y})dt \quad (1)$$

Είναι:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\frac{d\bar{u}}{dt} = m\frac{d\dot{x}}{dt}\bar{x}_0 + m\frac{d\dot{y}}{dt}\bar{y}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x\bar{x}_0 + F_y\bar{y}_0 = m\frac{d\dot{x}}{dt}\bar{x}_0 + m\frac{d\dot{y}}{dt}\bar{y}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = m\dfrac{d\dot{x}}{dt} \\ F_y = m\dfrac{d\dot{y}}{dt} \end{cases} \quad (2).$$ Επειδή $F_x = \alpha\sin\omega t$ κ' $F_y = \alpha\cos\omega t$ (3)

Από (2), (3) έχουμε ότι:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = \alpha\sin\omega t \Rightarrow \int_0^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^t \frac{\alpha}{m}\sin\omega t\,dt \Rightarrow \dot{x} = \frac{\alpha}{m\omega}(-\cos\omega t)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{\alpha}{m\omega}(1-\cos\omega t) \quad (4)$$

$$m\frac{d\dot{y}}{dt} = \alpha\cos\omega t \Rightarrow \int_0^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t \frac{\alpha}{m}\cos\omega t\,dt \Rightarrow \dot{y} = \frac{\alpha}{m\omega}(\sin\omega t)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{\alpha}{m\omega}\sin\omega t \quad (4)$$

αντικαθιστώντας τις (3) κ' (4) στην (1)

λαμβάνουμε:

$$W=\int_0^t (F_x\dot{x}+F_y\dot{y})\,dt=\int_0^t \left(\alpha\sin\omega t\,\frac{\alpha}{m\omega}(1-\cos\omega t)\right.$$

$$\left.+\,\alpha\cos\omega t\,\frac{\alpha}{m\omega}\sin\omega t\right)dt=\int_0^t \frac{\alpha^2}{m\omega}\sin\omega t\,dt=$$

$$=\frac{\alpha^2}{m\omega^2}\left(-\cos\omega t\right)_0^t=\frac{\alpha^2}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

Η ισχύς P είναι ίση με:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{\alpha^2}{m\omega^2}\sin\omega t$$

---

## Άσκηση 25

Υλικό σημείο κινείται σε περιφέρεια κύκλου κέντρου O και ακτίνας 3. Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο Oxy. Εάν στο υλικό σημείο επιδρά δύναμη:

$$\vec{F} = (2x-y+z)\,\bar{x}_0 + (x+y-z^2)\,\bar{y}_0 + (3x-2y+4z)\,\bar{z}_0$$

να βρεθεί το έργο για μια πλήρη περιστροφή.

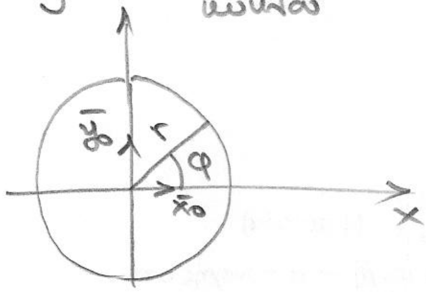
### Λύση

Επειδή η κίνηση γίνεται στο επίπεδο Oxy ισχύει ότι $z=0$. Άρα η δύναμη $\vec{F}$ λαμβάνει τη μορφή,

$$\vec{F} = (2x-y)\,\bar{x}_0 + (x+y)\,\bar{y}_0 + (3x-2y)\,\bar{z}_0 \qquad (1)$$

Το έργο της δύναμης $\bar{F}$ για την κίνηση στο επίπεδο είναι:

$$W = \oint_{\substack{\text{περιφ}\\ \text{κύκλου}}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_{\substack{\text{περιφ}\\ \text{κύκλου}}} F_x dx + F_y dy \qquad (2)$$




Από το σχήμα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\cos\phi \Rightarrow dx = -3\sin\phi\, d\phi \\ y &= 3\sin\phi \Rightarrow dy = 3\cos\phi\, d\phi \end{aligned}\right\} (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (3) στην (2) λαμβάνουμε

$$W = \int_0^{2\pi} (6\cos\phi - 3\sin\phi)(-3\sin\phi)\,d\phi + (3\cos\phi + 3\sin\phi)(3\cos\phi)\,d\phi$$

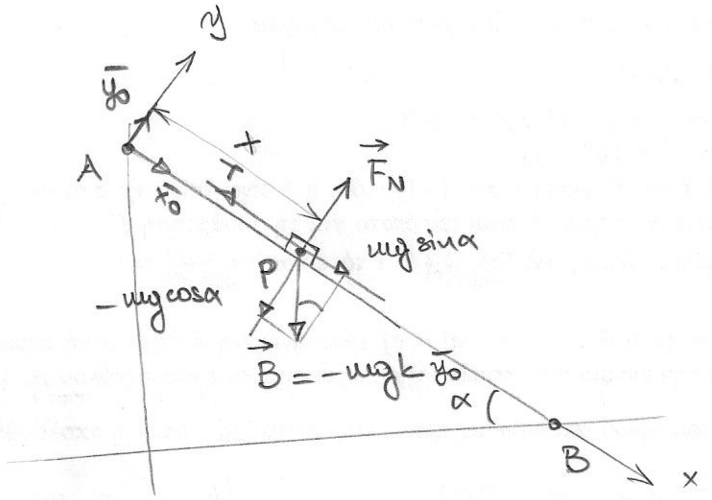
$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9\sin\phi\cos\phi)\,d\phi = 18\pi.$$

## Άσκηση 26 (Φυλ. 12)

Σώμα P, μάζας m γλιστρά χωρίς να περιστρέφεται με σταθερό συντελεστή τριβής $\eta = 0.1$, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο AB γωνίας $\alpha$ (βλέπε Σχήμα). Αν αυτό ξεκινά από την ηρεμία από την κορυφή A του κεκλιμένου επιπέδου, βρείτε (α) την επιτάχυνση, (b) την ταχύτητα και (c) την απόσταση που έχει διανύσει σε χρόνο t.

### Λύση

Σχηματικά :




(α) Στη μάζα m ενεργεί το βάρος $\vec B$, η αντίδραση $\vec F_N$ που ασκούνται πάνω στο P, και η δύναμη τριβής $\vec T$ που διευθύνεται παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο και με φορά αντίθετη προς την κίνηση και με μέτρο:

$$|\vec T| = \eta|\vec F_N| = \eta\, mg\cos\alpha, \text{ δηλαδή } \vec T = -\eta\, mg\cos\alpha\, \vec x_0$$

Οπότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γράφεται ως:

$$m\vec{x} = \vec B + \vec F_N + \vec T \Rightarrow \begin{cases} m\alpha_x = mg\sin\alpha - \eta\, mg\cos\alpha & (1) \\ m\underset{\underset{0}{\|}}{a_y} = -mg\cos\alpha + F_N & (2) \end{cases}$$

(b) Από την (1) $\Rightarrow m\dfrac{d\dot x}{dt} = mg\sin\alpha - \eta\, mg\cos\alpha$, και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\dot x = g(\sin\alpha - \eta\cos\alpha)t \quad (3)$$

(c) Τέλος, από την (3) αντικαθιστώντας το $\dot x$ με $dx/dt$ και ολοκληρώνοντας ως προς $t$, βρίσκουμε ότι η απόσταση, $x$ που έχει διανύσει το υλικό σημείο σε τυχαία χρονική στιγμή $t$ είναι:

$$x = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \eta\cos\alpha)t^2, \quad \eta = 0.1 \quad (4)$$

---

Άσκηση 27 (Φυλ. 13)

Σώμα κινείται στο επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $\left(\frac{11}{3},0,0\right),\left(0,\frac{11}{5},0\right),\left(0,0,\frac{11}{8}\right)$ και πάνω του ενεργεί το βάρος, η δύναμη $\vec{F}_1 = 8\bar{x}_0 + 7\bar{y}_0 + 10\bar{z}_0$ και η τριβή, όπου ο συντελεστής τριβής είναι $\eta = 0.1$

Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης στο καρτεσιανό σύστημα.

Λύση

Η εξίσωση επιπέδου είναι: $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A}{\Delta}x+\frac{B}{\Delta}y+\frac{\Gamma}{\Delta}z+1=0$, το επίπεδο περνάει από τα σημεία $\left(\frac{11}{3},0,0\right),\left(0,\frac{11}{5},0\right),\left(0,0,\frac{11}{8}\right)$, άρα το επίπεδο είναι το

$\frac{3}{11}x+\frac{5}{11}y+\frac{8}{11}z=1 \Rightarrow 3x+5y+8z=11$. Επομένως ο δεσμός θα είναι: $f(x,y,z): 3x+5y+8z-11=0$ (1)

Η δεσμική δύναμη $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda\bar{\nabla}f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{z}_0\right), \lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{F}^{(\delta)} = \lambda(3\bar{x}_0+5\bar{y}_0+8\bar{z}_0)$ (2)

και το μέτρο της θα είναι $|\vec{F}^{(\delta)}| = \lambda\sqrt{3^2+5^2+8^2} = \lambda\sqrt{98}$ (3)

Η επιβεβλημένη είναι το βάρος $\vec{F}^{(e)} = \vec{B}$ που ασκείται στον z-άξονα δηλ. $\vec{B} = -mg\bar{z}_0$ (4)

Σε διανυσματική μορφή έχουμε:

$$m\vec{\alpha} = \vec{B}+\vec{F}_1+\lambda\vec{\nabla}f-\eta|\lambda\vec{\nabla}f|\underbrace{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}_{\vec{\varepsilon}_0} \Rightarrow \text{σε καρτεσιανές συντεταγμ.}$$

$$\Rightarrow m\vec{\alpha} = \vec{B}+\vec{F}_1+\lambda\vec{\nabla}f-\eta|\lambda\vec{\nabla}f|\frac{\dot{x}\bar{x}_0+\dot{y}\bar{y}_0+\dot{z}\bar{z}_0}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \quad (5)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις Lagrange α' είδους είναι οι εξής:

$$
\left.
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= 8 + 3\lambda - \eta\,\lambda\sqrt{98}\,\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\\
m\ddot{y} &= 7 + 5\lambda - \eta\,\lambda\sqrt{98}\,\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\\
m\ddot{z} &= -mg + 10 + 8\lambda - \eta\,\lambda\sqrt{98}\,\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}
\end{aligned}
\right\}
\quad (6)
$$

όπου $\eta$ είναι ο συντελεστής τριβής, $m$ η μάζα του σώματος (υλικού σημείου), $g$ η επιτάχ. της βαρύτητας και $\dot{x}$, $\dot{y}$ και $\dot{z}$ οι συνιστώσες της ταχύτητας του υλικού σημείου.

Άσκηση 28

Δίνεται η δύναμη: $\bar{F} = (2xy + z^3)\bar{x_0} + x^2\bar{y_0} + 3xz^2\bar{z_0}$.

α) Να δ.ο. η δύναμη είναι συντηρητική

β) Να βρείτε το δυναμικό $V$ από το οποίο απορρέει η $\bar{F}$

γ) Να υπολογίσετε το παραγόμενο έργο κατά την κίνηση υλικού σημείου από το σημείο $A(1,-2,1)$ έως το $B(3,1,4)$

Λύση

α) Για να είναι η $\bar{F}$ συντηρητική πρέπει:

$$\text{curl}\,\bar{F} = 0 \text{ ή } \bar{\nabla}\times\bar{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{x_0} & \bar{y_0} & \bar{z_0} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x_0} & \bar{y_0} & \bar{z_0} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z}\right)\bar{x_0} - \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial z}\right)\bar{y_0}$$

$$+ \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial y}\right)\bar{z_0} = 0\,\bar{x_0} - (3z^2 - 3z^2)\bar{y_0} + (2x - 2x)\bar{z_0} = \bar{0}$$

β) Άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V = V(x,y,z)$ (το δυναμικό) τέτοια ώστε: $\bar{F} = -\bar{\nabla}V \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_x\bar{x_0} + F_y\bar{y_0} + F_z\bar{z_0} = -\frac{\partial V}{\partial x}\bar{x_0} - \frac{\partial V}{\partial y}\bar{y_0} - \frac{\partial V}{\partial z}\bar{z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2xy + z^3 &= -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (1) \\ x^2 &= -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2) \\ 3xz^2 &= -\partial V/\partial z \quad (3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -2xy - z^3 \quad (1) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -x^2 \quad (2) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -3xz^2 \quad (3) \end{aligned}\right.$$

Ολοκληρώνοντας $\Rightarrow$ την (1) ως προς $x$, θεωρώντας τα $y$ και $z$ σταθερά λαμβάνουμε $\Rightarrow$ $V = \int(-2xy - z^3)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = -x^2y - xz^3 + g_1(y,z) \quad (4)$$

όμοια οι (2) και (3) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} V &= -x^2y + g_2(x,z) \\ V &= -xz^3 + g_3(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

από (4) & (5) $\Rightarrow$ $\cancel{-x^2y} - xz^3 + g_1(y,z) = \cancel{-x^2y} + g_2(x,z)$

$$\Rightarrow g_2(x,z) = -xz^3 + g_1(y,z) \quad (6)$$

από την (6) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial g_2(x,z)}{\partial x} = -z^3 + \frac{\partial g_1(y,z)}{\partial x} = -z^3 + 0 = -z^3$$

ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$g_2(x,z) = -xz^3 + c, \quad c = \text{σταθερά} \quad (7)$$

οπότε η (5) από (7) γίνεται: $V = -x^2y - xz^3 + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V = -x(xy + z^3) + c}$$

γ) Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική το έργο της κατά την κίνηση από το A έως το B σε τυχαίο δρόμο είναι:

$$W = V(A) - V(B) \Rightarrow W = -x(xy+z^3)+c\Big|_A -$$

$$-\left[-x(xy+z^3)+c\right]\Big|_B = -x(xy+z^3)\Big|_A^B = 202$$

Άσκηση 29 (Φυλλάδιο 14)

Υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται κατά μήκος του άξονα $Ox$ υπό την επίδραση συντηρητικής δύναμης δυναμικού $V(x)$. Αν το υλικό σημείο βρίσκεται στις θέσεις $x_1$ και $x_2$ κατά τις χρονικές στιγμές $t_1$ και $t_2$, αντιστοίχως να δ.ο $E$ είναι η μηχανική ενέργεια τότε:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

λύση

Από αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) έχουμε: $E = E_{κιν} + E_{δυν} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(x)\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m(E-V(x))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2(E-V(x))}}\, dx$$

επειδή $dt > 0$ λαμβάνουμε την θετική ρίζα και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}}$$

## Άσκηση 30 (Φυλ. 15)

Να υπολογιστεί στο επίπεδο Oxy το έργο της δύναμης $\vec{F} = 5r\vec{r}_0 + 10r\bar{\theta}_0$ σε πολικές συντεταγμένες από τη θέση $r=1$ έως τη θέση $r=2$, πάνω στην καμπύλη $r=10\theta$.

### Λύση

$$W = \oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint (5r\bar{r}_0 + 10r\bar{\theta}_0)(dr\,\bar{r}_0 + r\,d\theta\,\bar{\theta}_0) =$$

$$= \oint 5r\,dr + 10r^2 d\theta \underset{\substack{\uparrow \\ dr=10d\theta}}{=} \oint 5r\,dr + 10r^2 d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \oint 5r\,dr + \cancel{10}r^2 \frac{dr}{\cancel{10}} \Rightarrow W = \int_{r=1}^{r=2} (5r + r^2)\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \left[\frac{5r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{59}{6}.$$

## Άσκηση 31 (Φυλ. 16)

Σε υλικό σημείο ασκείται η δύναμη $\vec{F} = \dfrac{3\vec{u}\times\vec{c_1}}{|\vec{c_2}|^3}$, όπου $\bar{c}_1$ και $\bar{c}_2$ σταθερά διανύσματα και $\vec{c_1} \neq \bar{0}$, $|\vec{c}_2| \neq 0$.
Το υλικό σημείο κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς C. Να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, από σημείο 1 στο σημείο 2.

### Λύση

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m |\vec{u}_2|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{u}_1|^2 = W = \int_C \vec{F}\cdot d\bar{r} \Rightarrow$$

όπου $\bar{F} = \dfrac{3\bar{u}\times\bar{c}_1}{|\bar{c}_2|^3}$ και $d\bar{r} = \bar{u}\,dt$

Συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας $\Delta K = \displaystyle\int_C \frac{3\bar{u}\times\bar{c}_1}{|\bar{c}_2|^3}\cdot\bar{u}\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta K = \int_C \frac{3(\bar{u}\times\bar{c}_1)\cdot\bar{u}}{|\bar{c}_2|^3}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{3}{|\bar{c}_2|^3}\int_C (\bar{u}\times\bar{c}_1)\cdot\vec{u}\,dt \Rightarrow \Delta K = \frac{3}{|\bar{c}_2|^3}\int_C \underbrace{(\bar{u}\times\bar{u})}_{\bar{0}}\cdot\bar{c}_1\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{3}{|\bar{c}_2|^3}\int_C \vec{0}\cdot\vec{c}_1\,dt = 0 \Rightarrow \Delta K = 0$$

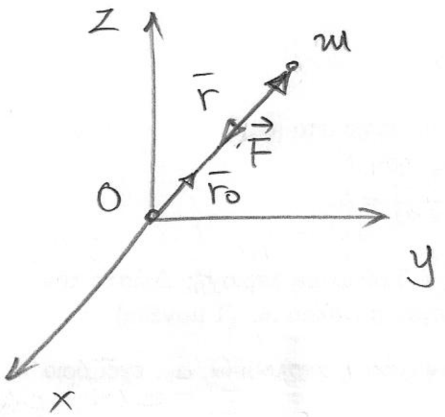
άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν.

## Άσκηση 32 (Φυλ. 17)

Υλικό σημείο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -r^3\vec{r_0}$. Να βρεθεί η στροφορμή $\vec{L}_2(t)$ την χρονική στιγμή $t_2$, όταν την χρονική στιγμή $t_1$ είναι:

$$\vec{L}_1(t_1) = c_1\bar{x}_0 + c_2\bar{y}_0 + c_3\bar{z}_0$$

### Λύση




$$\left.\begin{array}{l} \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{και} \quad \vec{r}\times\vec{F} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \\ \text{όμως} \quad \vec{r} = r\bar{r}_0 \\ \text{και} \quad \vec{F} = -r^3\vec{r_0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\bar{r}_0 \times (-r^3\bar{r}_0) = -r^4 \underbrace{\bar{r}_0\times\bar{r}_0}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_2 = \bar{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L}_2 = c_1\bar{x}_0 + c_2\bar{y}_0 + c_3\bar{z}_0$$

ίση με την $\vec{L}_1$.

Άσκηση 33

Υλικό σημείο μάζας $m=2kgr$ κινείται στο Oxy επίπεδο υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων $V=8x-2y$

Το σημείο ξεκινά από την ηρεμία και την χρονική στιγμή $t=0$, $\vec{r}_0 = 5\bar{x}_0 + 2\bar{y}_0$

(α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης

(β) Να βρεθεί η ταχύτητα του κάθε χρονική στιγμή.

Λύση

(α) Από θεμελιώδη νόμο Νεύτωνα έχουμε:

$$m\bar{\alpha} = \vec{F} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = \bar{F}_x \Rightarrow m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \bar{F}_y \Rightarrow m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} m\ddot{x} = -8 & (1) \\ m\ddot{y} = 2 & (2) \end{array} \right.$$

(β) ολοκληρώνοντας τις (1) έχουμε ότι:

$$m\frac{d}{dt}\dot{x} = -8 \Rightarrow m\,d\dot{x} = -8dt \Rightarrow m\int d\dot{x} = -8\int dt$$

$$\Rightarrow m\dot{x} = -8t + c \Rightarrow \dot{x} = \frac{-8t}{m} + c_1 \quad \left(c_1 = \frac{c}{m}\right) \quad (3)$$

Όμοια για (2): $m\,d\dot{y} = 2dt \Rightarrow m\dot{y} = 2t + c_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{2t}{m} + c_3 \left(\text{όπου } c_3 = \frac{c_2}{m}\right) \quad (4)$$

Για $t=0$ ισχύει ότι $\dot{x}_0 = 5$ και $\dot{y}_0 = 2$

οπότε από την (2): $5 = -\dfrac{8\cdot 0}{m} + c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 5}$

και από την (3): $2 = \dfrac{2\cdot 0}{m} + c_3 \Rightarrow \boxed{c_3 = 2}$

άρα $\dot{x} = -\dfrac{8t}{m} + 5$ και $\dot{y} = \dfrac{2t}{m} + 2$.

# Άσκηση 34 (Φυλ. 11)

Υλικό σημείο βρίσκεται αρχικά στο σημείο $(x,y,z)=(1,1,1)$ και υπό την επίδραση της συντηρητικής δύναμης $\vec{F} = 10x\bar{x}_0 + 2y\bar{y}_0 + 3z^2\bar{z}_0$, πηγαίνει στο σημείο $(x,y,z)=(2,3,2)$. Να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

## Λύση

Η δύναμη είναι συντηρητική όταν $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 10x & 2y & 3z^2 \end{vmatrix} = 0\,\bar{x}_0 - 0\,\bar{y}_0 + 0\,\bar{z}_0 = \bar{0}.$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$ τ.ω. $\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow 10x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = -5x^2 + g_1(y,z) \\ F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow 2y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = -y^2 + g_2(x,z) \\ F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow 3z^2 = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow V = -z^3 + g_3(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = -5x^2 - y^2 - z^3 + C$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας που λέει ότι: $T+V = \text{σταθ}$ για συντηρητικές δυνάμεις έχουμε ότι: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow \Delta T = V_1 - V_2 \Rightarrow$

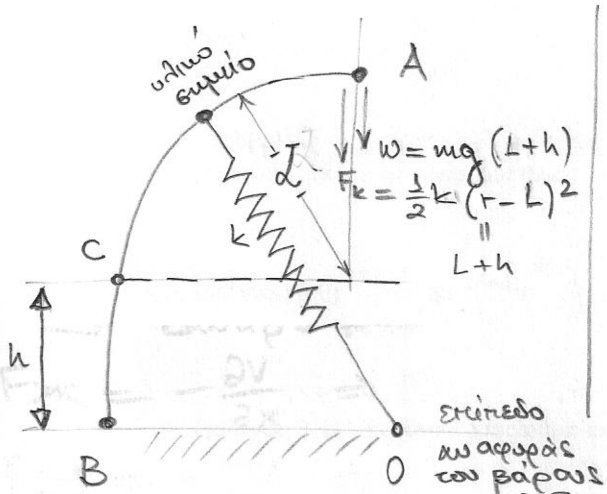
$$\Rightarrow \Delta T = V(1,1,1) - V(2,3,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = 30 \quad (\text{kgr m/s}).$$

## Άσκηση 35

Υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται κατά μήκος της τροχιάς $AB$. Αρχικά ($t=0$) το υλικό σημείο βρίσκεται στο $A$ και είναι ακίνητο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του στο σημείο $B$. Το ελατήριο έχει αρχικό μήκος $L$. Δίνονται: $L = 12\ cm$, $g = 9.81\ m/s^2$, $h = 10\ cm$, $k = 2\ kgr/cm$ και $m = 0.5\ kg$.

### Λύση




Στο υλικό σημείο ασκείται το βάρος $W$ η δύναμη του ελατηρίου και η αντίδραση. Οι δυνάμεις του βάρους και του ελατηρίου είναι συντηρητικές. Η αντίδραση δεν παράγει έργο, οπότε μπορώ να εφαρμόσω την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και

$$T_A + \underbrace{V_A}_{= V_{A-\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} + V_{A-\varepsilon\lambda\alpha\tau\acute{\eta}\rho.}} = T_B + V_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{= \frac{1}{2}m|\vec{u}_A|^2,\ \vec{u}_A \to 0} + mg(L+h) + \frac{1}{2}k\left[(L+h)-L\right]^2 = \frac{1}{2}m|\vec{u}_B|^2 + \cancel{V_{B-\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}}^{\,0} + \cancel{V_{B-\varepsilon\lambda\alpha\tau.}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow 2mg(L+h) + \cancel{\tfrac{1}{2}}kh^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}m|\vec{u}_B|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}_B|^2 = 2g(L+h) + \frac{kh^2}{m} \Rightarrow |\vec{u}_B| = \pm\sqrt{\frac{kh^2}{m} + 2g(L+h)}.$$

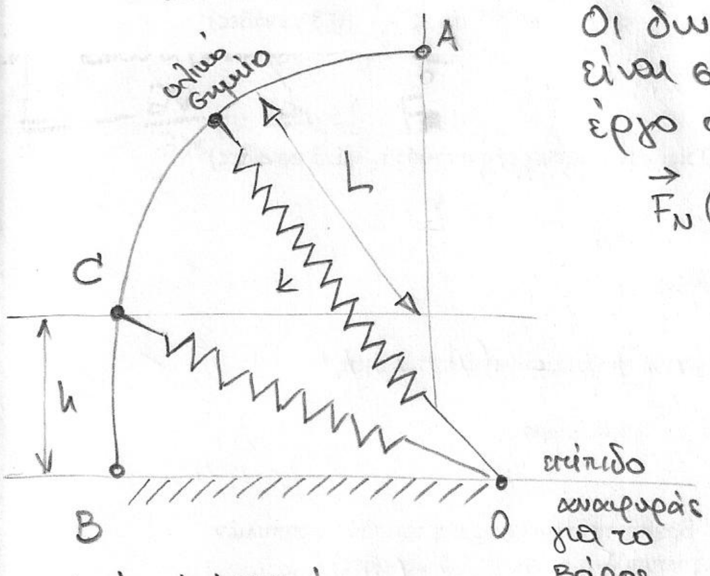
Επειδή το μέτρο της ταχύτητας είναι θετικό:

$$|\vec{u}_B| = \sqrt{\frac{kh^2}{m} + 2g(L+h)} \Rightarrow |\vec{u}_B| = \sqrt{8.32}\ m/s$$

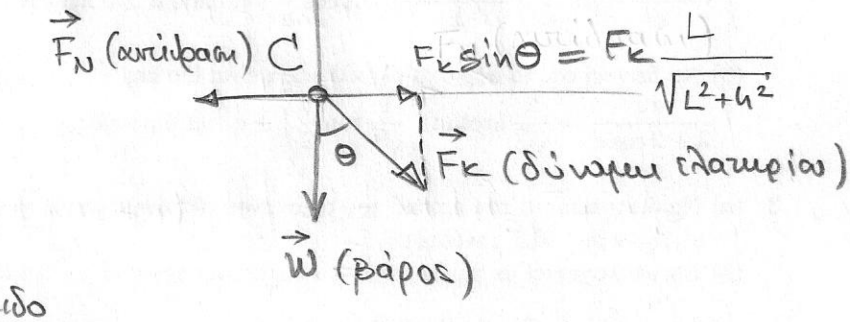
## Άσκηση 36 (Φυλ. 19)

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε εξαναγκασμένη κίνηση κατά μήκος της τροχιάς AB. Οπότε υπάρχει δύναμη αντίδρασης σε κάθε σημείο της τροχιάς του. Αρχικά $(t=0)$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο A και είναι ακίνητο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του και η κάθετη δύναμη (αντίδραση, λόγω της εξαναγκασμένης κίνησης του σημ.) στο σημείο C (Σχήμα). Το ελατήριο έχει αρχικό μήκος L και το σημείο C βρίσκεται ακριβώς στο τέλος του κυκλικού μέρους της τροχιάς του υλικού σημείου. Δίνονται: $L = 12\,cm$, $g = 9.81\,m/s^2$, $h = 10\,cm$, $k = 2\,kgr/cm$ και $m = 0.5\,kgr$.

### Λύση




Στο υλικό σημείο ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους, του ελατηρίου και η αντίδραση. Οι δυνάμεις του βάρους και του ελατηρίου είναι συντηρητικές. Η αντίδραση δεν παράγει έργο οπότε εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ.




Από ΑΔΜΕ έχουμε:

$$T_A + V_A = T_C + V_C \Rightarrow 0 + mgL + \frac{1}{2}kh^2 = \frac{1}{2}m|\vec{u}_C|^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2+h^2}-L\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}_C|^2 = \sqrt{2gL + \frac{k}{m}h^2 - \frac{k}{m}\left(\sqrt{L^2+h^2}-L\right)^2} \quad (1)$$

Από την (1) μπορώ να υπολογίσω την ταχύτητα του υλικού σημείου στο C.

Στο σημείο C στις φυσικές συντεταγμένες από νόμο Νεύτωνα έχουμε:

$$-F_N + F_k \sin\theta = \frac{m|\vec{u}_C|^2}{L} \Rightarrow F_N = F_k \sin\theta - \frac{m|\vec{u}_C|^2}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = F_k \frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}} - \frac{m|\vec{u}_C|^2}{L} \Rightarrow F_N = k\left(\sqrt{L^2+h^2}-L\right)\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}} - \frac{m|\vec{u}_C|^2}{L}$$

## Άσκηση 37 (Φυλ. 20)

Υλικό σημείο μάζας $m=1$ kgr κινείται υπό την επίδραση της δύναμης:

$$\vec{F} = (3t^2-4t)\vec{x_0} + (12t-6)\vec{y_0} + (6t-12t^2)\vec{z_0}$$

α) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής του υλικού σημείου από $t=1$ έως $t=2$.

β) Εάν η ταχύτητα κατά την στιγμή $t=1$ είναι $\vec{u_1} = 4\bar{x_0} - 5\bar{y_0} + 10\bar{z_0}$, ποιά είναι η ταχύτητα τη στιγμή $t=2$;

### Λύση (Παράγραφος 2.9α βιβλίου)

Γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της ορμής του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $t_2-t_1$ είναι ίση με την ώθηση της δύναμης στο ίδιο χρονικό διάστημα, οπότε:

$$m\vec{u_2} - m\vec{u_1} = \underline{\vec{O}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (1)$$

α) Μεταβολή της ορμής του υλικού σημείου από $t=1$ έως $t=2$

$$\underline{\vec{O}} = \int_1^2 \left[ (3t^2-4t)\bar{x_0} + (12t-6)\bar{y_0} + (6t-12t^2)\bar{z_0} \right] dt =$$

$$= \int_1^2 (3t^2-4t)dt\, \bar{x_0} + \int_1^2 (12t-6)dt\, \bar{y_0} + \int_1^2 (6t-12t^2)dt\, \bar{z_0}$$

$$= \vec{x_0} + 12\vec{y_0} - 19\vec{z_0} \quad (2)$$

β) Από Θεώρημα ώθησης–ορμής:

$$m\bar{u_2} - m\bar{u_1} = \bar{x_0} + 12\bar{y_0} - 19\bar{z_0}, \quad m=1$$

$$\Rightarrow \bar{u_2} = \bar{u_1} + (\bar{x_0} + 12\bar{y_0} - 19\bar{z_0}) = (4\bar{x_0} - 5\bar{y_0} + 10\bar{z_0}) +$$

$$+ (\bar{x_0} + 12\bar{y_0} - 19\bar{z_0}) = 5\bar{x_0} + 7\bar{y_0} - 9\bar{z_0}$$

## Άσκηση 39.



Υλικό σημείο κινείται στην τροχιά $r = \alpha + \beta\theta$, $\alpha, \beta$ σταθ. Το υλικό σημείο υπόκειται στην επίδραση κεντρικής δύναμης, που έχει κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Ζητούνται οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες, όταν η εμβαδική ταχύτητα είναι ίση με $c_1$.

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση κατά την κεντρική κίνηση είναι:

$$\vec{\alpha} = \alpha_r \vec{r}_0 + \alpha_\theta \vec{\theta}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0 + 0\,\vec{\theta}_0, \quad (1)$$

επειδή $r = \alpha + \beta\theta$.

Κατά την κεντρική κίνηση η εμβαδική ταχύτητα είναι ίση με

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (2)$$

Άρα, $c_1 = \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2\dot{\theta} \Rightarrow r^2\dot{\theta} = 2c_1$ (3)

Είναι:

$$\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3) η (4) γράφεται

$$\alpha_r = -\frac{(2c_1)^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2}\right] \quad (5)$$

Επειδή, $r = \alpha + \beta\theta$, θα έχουμε

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\alpha + \beta\theta}$ (6). Υπολογίζοντας το $\dfrac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2}$ από την (6) και αντικαθιστώντας στην (5) λαμβάνουμε

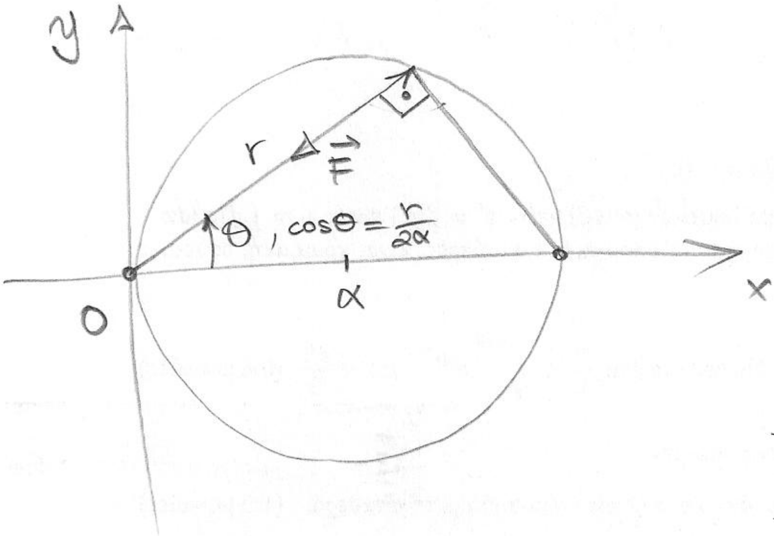
$$\alpha_r = -\frac{(2c_1)^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{2\beta^2}{r^3}\right] \quad (7)$$

Άσκηση 40 (Φυλ. 21)

Υλικό σημείο κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση μιας δύναμης φοράς πάντα προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, O. Να βρεθεί η έκφραση της δύναμης:

$$\vec{F} = f(r)\,\bar{r}_0$$

Λύση




Η εξίσωση τροχιάς του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$r = 2\alpha\cos\theta \quad (1)$$

Για κεντρικές δυνάμεις η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}_{\substack{\text{κινητική} \\ \text{σε πολικές}}} + \underbrace{V(r)}_{\substack{\text{δυναμική} \\ \text{σε πολικές}}} = E \quad (2)$$

και στροφορμή του σημείου είναι $r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m}$ τότε

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2} \quad (3)$$

Η (2) μέσω της (3) γράφεται: $\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{L^2}{m^2r^4} + r^2\frac{L^2}{m^2r^4}\right] + V(r) = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + V(r) = E = \text{σταθερά} \quad (4), \text{ όπου } h = \frac{L}{m}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + V(r) = \text{σταθερά} \quad (5)$$

παραγωγίζοντας την (5) ως προς r έχουμε ότι:

$$-4\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^5}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]+\frac{mh^2}{2r^4}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+2r\right)+\frac{dV}{dr}=0 \quad (6)$$

από (1) : $\frac{dr}{d\theta}=-2\alpha\sin\theta \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{d}{dr}\left(-2\alpha\sin\theta\right)^2=$

$$=\frac{d}{dr}\left(4\alpha^2\sin^2\theta\right)=\frac{d}{dr}\left(4\alpha^2(1-\cos^2\theta)\right)=\frac{d}{dr}\left(4\alpha^2-\cancel{4\alpha^2}\frac{r^2}{\cancel{(2\alpha)^2}}\right)$$

$$=\frac{d}{dr}\left(4\alpha^2-r^2\right)=-2r \quad (7)$$

Από την σχέση που ισχύει για κεντρικές (συντηρητικές δυνάμεις)

$$\bar{F}=-\mathrm{grad}\,V \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dr}=-f(r)} \quad (8) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial V}{\partial z}=0\right)$$

οπότε $V=V(r)$

και από (6) μέσω της (7) έχουμε ότι:

$$-\frac{2mh^2}{r^5}\left[(-2\alpha\sin\theta)^2+r^2\right]+\frac{mh^2}{2r^4}\left(-2r+2r\right)+\frac{dV}{dr}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dV}{dr}=\frac{2mh^2}{r^5}\left[4\alpha^2\sin^2\theta+4\alpha^2\cos^2\theta\right]\Rightarrow\frac{dV}{dr}=$$

$$=\frac{2mh^2}{r^5}4\alpha^2=\frac{8\alpha^2mh^2}{r^5},$$ επομένως η $f(r)=-\frac{8\alpha^2mh^2}{r^5}$

από την (8).

Επομένως η $\vec{F}=-\frac{8\alpha^2mh^2}{r^5}\vec{r_0}$

---

$\underline{2^{os}}$ τρόπος. : από εξίσωση (38) βιβλίου $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u+\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)=0,\ u=\frac{1}{r}$

Λυσ. $u=\frac{1}{2\alpha\cos\theta}$, παραγωγίζω ως προς r : $f(r)=f\left(\frac{1}{u}\right)=-mu^2h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$

Άσκηση 41 (Φυλ. 22)

Υλικό σημείο κινείται σε έλλειψη. Το υλικό σημείο δέχεται την επίδραση κεντρικής δύναμης η οποία έχει κέντρο το κέντρο O, της έλλειψης. Να δειχθεί ότι η επιτάχυνση είναι της μορφής, $\vec{\alpha} = -k^2 \vec{r}$, $k = \sigma\tau\alpha\theta$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta \qquad (1)$$

άρα

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \quad , \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \qquad (2)$$

Η παράσταση $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) (Έκφραση εμβαδικής ταχύτητας σε καρτεσιανές) γίνεται:

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}\Big[r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) -$$

$$- r\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\Big] = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad (3)$$

Κατά την κεντρική κίνηση η στροφορμή παραμένει σταθερή, δηλαδή:

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} = \sigma\tau\alpha\theta \qquad (4)$$

Από (4) η (3) δίνει:

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{L}{m} \Rightarrow x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{L}{m} = \sigma\tau\alpha\theta = c \qquad (5)$$

Επειδή η κίνηση γίνεται σε έλλειψη θα ισχύει

$$x = \alpha\cos u \quad , \quad y = b\sin u \qquad (6)$$

όπου $\alpha, b$ οι ημιάξονες της έλλειψης

Από την (6) προκύπτει ότι:

$$\dot{x} = -\alpha \sin u\,\dot{u} \quad , \quad \dot{y} = b\cos u\,\dot{u} \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις (6) και (7) στην (5) λαμβάνουμε:

$$c = x\dot{y} - y\dot{x} = (\alpha\beta\cos^2 u + \alpha\beta\sin^2 u)\,\dot{u} = \alpha\beta\dot{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\dot{u} = c \Rightarrow \dot{u} = \frac{c}{\alpha\beta} = k = \text{σταθερά} \qquad (8)$$

Επειδή $\dot{u} = k \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = k \Rightarrow \displaystyle\int_0^u du = \int_0^t k\,dt \Rightarrow u = kt \quad (9)$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9) οι (6) γίνονται:

$$x = \alpha\cos kt \quad , \quad y = b\sin kt \qquad (10)$$

από την (10) παραγωγίζοντας διαδοχικά προκύπτει:

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{u}^2\cos u = -\dot{u}^2 x \quad , \quad \ddot{y} = -b\dot{u}^2\sin u = -\dot{u}^2 y \qquad (11)$$

Η επιτάχυνση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{\alpha} = \ddot{x}\,\vec{x}_0 + \ddot{y}\,\bar{y}_0 = -\dot{u}^2 x\,\bar{x}_0 - \dot{u}^2 y\,\bar{y}_0 = -\dot{u}^2\vec{r} \Rightarrow$$

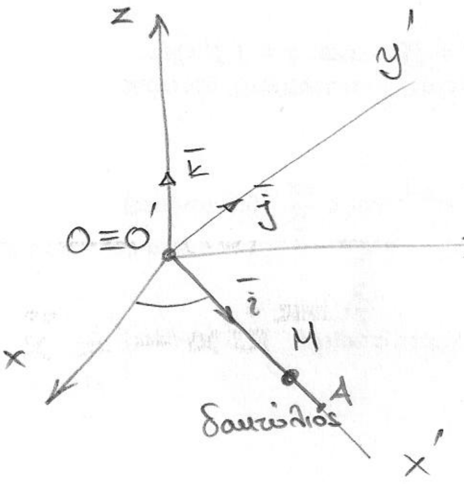
$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = -k^2\vec{r}.}$$

---

# Άσκηση 42 (Φυλ. 23)

Ράβδος μήκους 10 cm περιστρέφεται σ' ένα επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = 4$ rad/s. Ένας δακτύλιος ολισθαίνει στη ράβδο με σταθερή ταχύτητα 3 cm/s σχετικά με τη ράβδο. Να υπολογισθεί η απόλυτη επιτάχυνση του δακτυλίου τη στιγμή, που ο δακτύλιος εγκαταλείπει τη ράβδο. (Σχήμα)

## Λύση




OA ράβδος

xyz : αδρανειακό σύστημα

x'y'z : κινούμενο σύστημα.

Για την απόλυτη επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ ισχύει

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{O'} + \vec{\alpha}_M + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}_M) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \qquad (1)$$

όπου $\vec{\alpha}_{O'}$: απόλυτη επιτάχ. της αρχής O', $\vec{\alpha}_M$ : σχετική επιτ. του M

$\dot{\vec{\omega}}$ : γωνιακή επιτάχ., $\vec{\omega}$ : γωνιακή ταχύτητα, $\vec{r}\,'$ : διάν. θέσης ως προς το κινούμενο σύστημα, $\vec{u}_M$ : σχετική ταχ. του M.

Από δεδομένα άσκησης έχουμε ότι: $\vec{\omega} = 4\bar{k}$ (rad/sec), $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$,

$\vec{\alpha}_{O'} = \vec{0}$, $\vec{r}\,' = x'\vec{i}$, $\vec{u}_M = \dot{\vec{r}}\,' = \dot{x}'\bar{i} = 3\bar{i}$ (cm/sec) και

$\vec{\alpha}_M = 0\bar{i}$

Από τις παραπάνω και για $\vec{r} = 10\vec{i}$ (cm) η σχέση (1) δίνει:

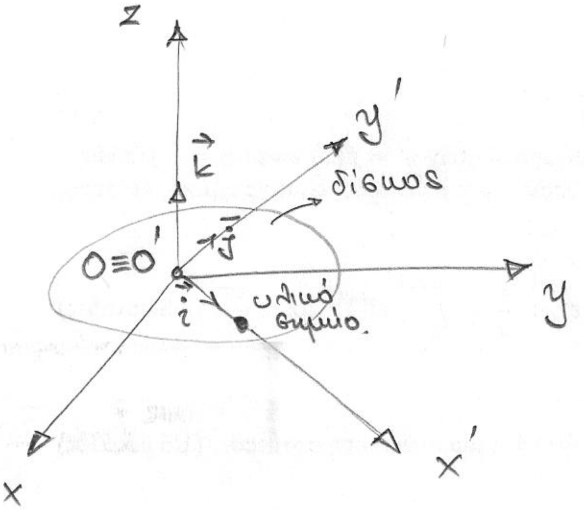
$$\vec{\alpha} = 2(\vec{\omega} \times \vec{u}_M) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2(4\bar{k} \times 3\bar{i}) + 4\bar{k} \times (4\bar{k} \times 10\bar{i}) =$$
$$= 24\vec{j} + 160\bar{i}$$

(για να πάω από το $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ στο $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ χρησιμοποιώ τον μετασχηματισμό στροφής)

## Άσκηση 43 (Φυλ. 24)

Δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega$. Κατά μήκος μιας ακτίνας του δίσκου κινείται υλικό σημείο, του οποίου η απόσταση από το κέντρο του δίσκου δίνεται από τη σχέση $\alpha + b\cos kt$, $\alpha, b, k =$ σταθ. Να υπολογιστεί η απόλυτη επιτάχυνση του υλικού σημείου συναρτήσει του χρόνου.

### Λύση




Για την απόλυτη επιτάχυνση ισχύει:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{O'} + \vec{\alpha}_M + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}_M) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \qquad (1)$$

(βλέπε προηγούμενη άσκηση για εξήγηση όρων, ασκ. 42)

Λαμβάνοντας υπόψιν τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} = \omega \vec{k}, \quad \dot{\vec{\omega}} = 0\vec{k}, \quad \vec{\alpha}_{O'} = \vec{0}, \\ \vec{r}' = \vec{O'M} = (\alpha + b\cos kt)\vec{i}, \quad \vec{u}_M = (-bk\sin kt)\vec{i}, \\ \vec{\alpha}_M = (-bk^2 \cos kt)\vec{i} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2) η (1) δίνει:

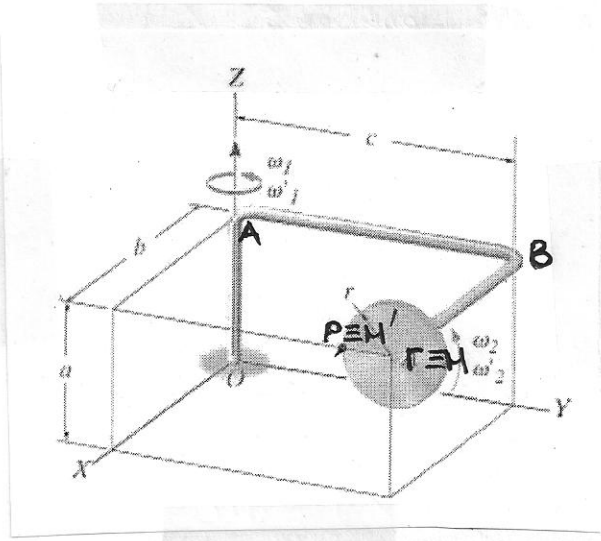
$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_M + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}_M) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= -2k^2 \cos kt\,\vec{i} - 2b\omega k \sin kt\,\vec{j} - \omega^2(\alpha + b\cos kt)\vec{i} =$$

$$= -\left[\alpha\omega^2 + b(\omega^2 + k^2)\cos kt\right]\vec{i} - 2b\omega k \sin kt\,\vec{j}$$

## Άσκηση 44 (Φυλ. 25)

Η ράβδος του σχήματος (Σχήμα) περιστρέφεται στον z-άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1$ και γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\dot{\omega}_1$. Συγχρόνως, ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με γωνιακή ταχ. μέτρου $\omega_2$ και γων. επιτάχ. μέτρου $\dot{\omega}_2$, και οι δύο μετριούνται σε σχέση με τη ράβδο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου P πάνω στο δίσκο. Δίνονται: $\omega_1 = 3\ rad/s$, $\dot{\omega}_1 = 4\ rad/s^2$, $\omega_2 = 2\ rad/s$, $\dot{\omega}_2 = 1\ rad/s$ και $\alpha = 2\,m$, $b = 3\,m$, $c = 4\,m$, $r = 0.5\,m$.



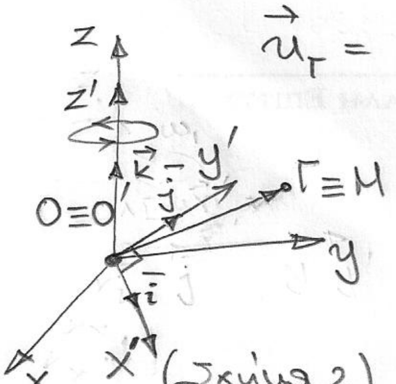

Σχήμα 1

### Λύση.

Εδώ έχουμε δύο κινούμενα συστήματα συντεταγμένων τα $O'x'y'z'$ και $O''x''y''z''$ (Σχήμα 2) με μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ και $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ αντίστοιχα.

Στο $O'x'y'z'$ το $O \equiv O'$ και $z = z'$.

Η απόλυτη ταχύτητα του σημείου $\Gamma \equiv M$ σε συνιστώσες του κινούμενου συστήματος $O'x'y'z'$ είναι (βλέπε σχήμα 2):




(Σχήμα 2)

$$\vec{u}_\Gamma = \vec{u}_{O'} + \vec{u}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad (1)$$

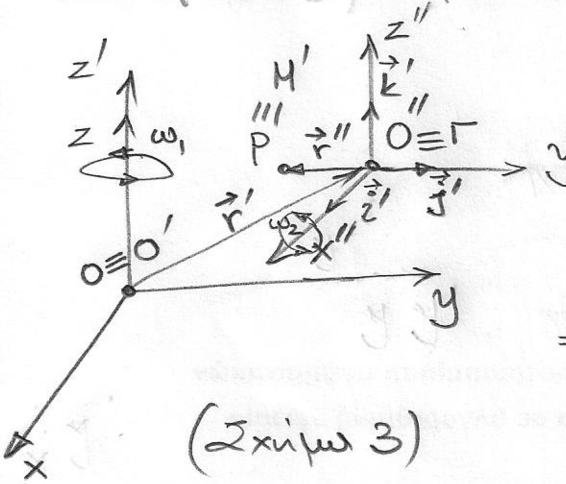
για το O' έχουμε ότι $\vec{u}_{O'} = 0$.

Η ταχύτητα $\vec{u}_M$ του σημείου M ως προς το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ είναι μηδέν $\vec{u}_M = 0$.

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\vec{u}_Γ = \vec{ω}\times\vec{r}\,' = \begin{pmatrix}0\\0\\ω_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b\\c\\α\end{pmatrix} = ω_1 c\,\vec{i} - ω_1 b\,\vec{j} \quad (2)$$

Για το σημείο P η απόλυτη ταχύτητα του σε συνιστώσες του κινούμενου συστήματος $O''x''y''z'' = Γx''y''z''$ όταν $\bar{i}=\bar{i}'$, $\bar{j}=\bar{j}'$ και $\bar{k}=\bar{k}'$ είναι (Σχήμα 3):




$$\vec{u}_P = \overset{u_Γ}{\vec{u}_{O''}} + \overset{0}{\cancel{\vec{u}_M\,'}} + \vec{ω}^*\times\vec{r}\,'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_P = \vec{u}_Γ + \vec{ω}^*\times\vec{r}\,'' = \begin{pmatrix}ω_2\\0\\ω_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-r\\0\end{pmatrix} =$$

(Σχήμα 3)

$$= -ω_1 r\,\vec{i} - rω_2\,\vec{k} \quad (3)$$

Τελικά η απόλυτη ταχύτητα του σημείου P πάνω στο δίσκο είναι:

$$\vec{u}_P = \vec{ω}\times\vec{r}\,' + \vec{ω}^*\times\vec{r}\,'' = ω_1 c\,\vec{i} - ω_1 b\,\vec{j} - rω_1\,\vec{i} - rω_2\,\vec{k} \quad (4)$$

αντικαθιστώντας έχουμε ότι:

$$\vec{u}_P = 3\frac{rad}{s}\cdot 4m\,\vec{i} - 3\frac{rad}{s}\cdot 3m\,\vec{j} - 0.5m\,3\frac{rad}{s}\,\vec{i} - 0.5m\,2\frac{rad}{s}\,\vec{k}$$

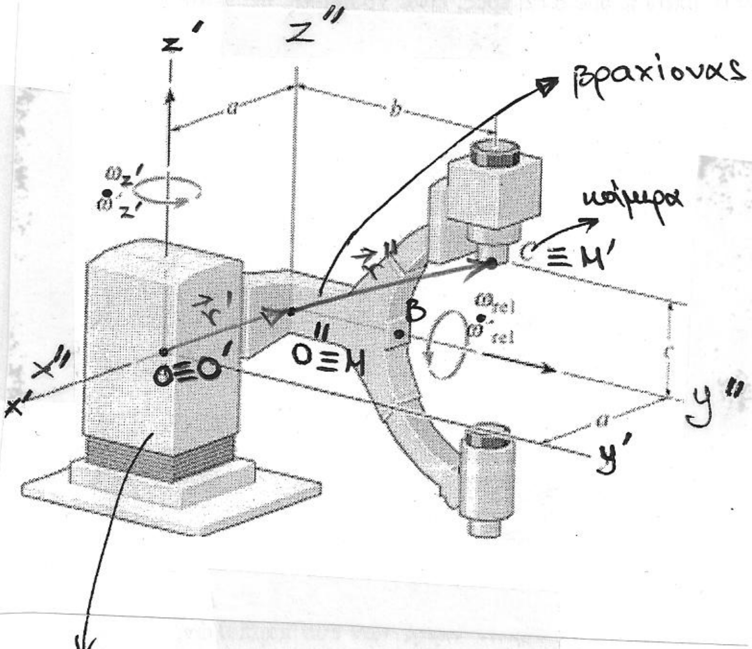
$$\Rightarrow \vec{u}_P = 10.5\,\vec{i} - 9\,\vec{j} - 1\,\vec{k} \quad (m/s).$$

# Άσκηση 45 (Φυλ. 26)

Το σώμα μηχανήματος ακτίνων X του σχήματος (σχήμα) περιστρέφεται δεξιόστροφα ως προς τον κάθετο άξονα (z΄-άξονα) του περιστρεφ. συστημ. $Ox'y'z'$ με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_{z'}$ και γωνιακή επιταχ. μέτρου $\dot{\omega}_{z'}$. Ο βραχίονας του περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από τον άξονα $O''B$, που είναι παράλληλος στον άξονα $y'$, με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_{rel}$ και γωνιακή επιτάχ. μέτρου $\dot{\omega}_{rel}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογιστεί η απόλυτη ταχύτητα του κέντρου C της κάμερας ακτίνων X, ως προς αδρανειακό σύστημα αξόνων του οποίου η αρχή είναι το σταθερό σημείο O.

## Λύση




σώμα μηχανήματος.

Για το σημείο $O''$ η απόλυτη ταχύτητα σε συνιστώσες του κινούμενου συστήματος $Ox'y'z'$ με μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι:

$$\vec{u}_{O''} = \cancel{\vec{u}_{O'}}^{\,0} + \cancel{\vec{u}_{M}}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{O''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Για το σημείο C (κέντρο της κάμερας) η απόλυτη ταχύτητα σε συνιστώσες του κινούμενου συστημ. $O''x''y''z''$ όπου $\vec{i}=\vec{i}'$, $\vec{j}=\vec{j}'$, $\vec{k}=\vec{k}'$ είναι:

$$\vec{u}_C = \vec{u}_{O''} + \cancel{\vec{u}_{M'}}^{\,0} + \vec{\omega}^{*} \times \vec{r}\,'' = \vec{u}_{O''} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{rel} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{μέσω της (1)} \Rightarrow \vec{u}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{rel} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_C = (\omega_{rel}\, c - \omega_{z'}\, b)\,\vec{i} + a\,\omega_{z'}\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \qquad (2)$$